

УДК 624.012

В.П.МИТРОФАНОВ, канд. техн. наук

Полтавский национальный технический университет им. Юрия Кондратюка

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В развитие работ [1, 2] разработан общий расчетный аппарат деформационной модели (ДМ) с экстремальным критерием прочности, обоснованным в [1], связанным с влиянием нисходящей ветви полной диаграммы сжатия бетона и применявшимся в работах [3-5] для частных случаев напряженно-деформированного состояния (НДС) железобетонных элементов (ЖБЭ). Рассматриваются задачи проверки прочности и подбора сечения арматуры нормального сечения ЖБЭ. Показано, что задача подбора сечения арматуры A_{sp} (или A_s) и A'_s , решаемая на основе критерия [6]

$$A(\varepsilon_{bm}, \dots) = A_{sp} \text{ (или } A_s \text{)} + A'_s = \min, \quad (1)$$

является прямой задачей математического программирования [7], а задача проверки прочности (параметра нагрузки F), решаемая с использованием критерия [1]

$$F(\varepsilon_{bm}, \dots) = \max, \quad (2)$$

представляет собой двойственную задачу по отношению к прямой, где ε_{bm} – деформация сжатой грани бетона в нормальном сечении ЖБЭ. Учитывая оптимизационный характер задач прочности ЖБЭ, отмечается возможность решения их с использованием известных программ [8]. Приводятся примеры решения важнейших задач расчета прочности нормальных сечений ЖБЭ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты [9] и другие свидетельства, что в бетоне сжатой зоны нормальных сечений ЖБЭ в предпредельных и предельном состояниях происходит специфическое перераспределение напряжений, сопровождающееся снижением напряжений (разупрочнением) в наиболее деформированном слое вблизи сжатой грани ЖБЭ, хотя деформации продолжают нарастать. Отмеченное разупрочнение, характерное для структурно неоднородных (псевдопластических) материалов (бетоны, горные породы и т. п.) при неоднородных НДС, обусловлено проявлением нисходящей (запредельной) ветви диаграммы сжатия, отображающей процесс снижения несущей способности материала вследствие нарастания степени его разрушенности.

Для учета разупрочнения бетона в расчете прочности нормальных сечений ЖБЭ необходима полная диаграмма сжатия (ПДС) с нисходящей ветвью максимальной протяженности, поскольку заранее неизвестно какой длины ее участок будет реализован в конкретной задаче.

Условия получения такой ПДС указаны в [2].

Экстремальный характер диаграммы сжатия бетона, имеющей строгий максимум $A(\varepsilon_R, R_b)$ (рис.1, а), обуславливает обязательное существование строгого максимума $T(\varepsilon_{bu}, F_{\max})$ зависимости “усилие сечения F – деформация сжатой грани бетона сечения ε_{bm} ” (рис.1, б), что приводит к необходимости экстремального критерия прочности нормального сечения (2) [1, 2].

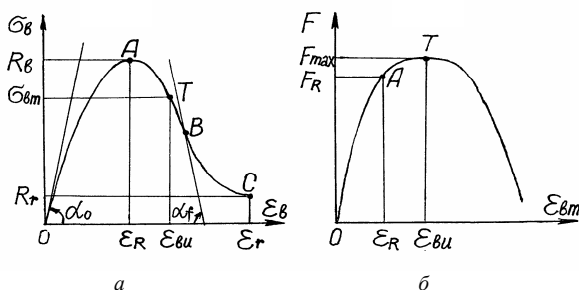


Рис. 1 – Полная диаграмма сжатия бетона $\sigma_b - \varepsilon_b$ (а), зависимость “усилие сечения F – деформация ε_{bm} ” ЖБЭ (б) и соответствие их точек максимума $A(\varepsilon_R, R_b)$ и $T(\varepsilon_{bu}, F_{\max})$

О наличии строгого максимума у кривых $F(\varepsilon_{bm})$ свидетельствует множество известных экспериментов, в которых обеспечивалось жесткое нагружение [10] ЖБЭ. Такими, в частности, являются [11-15], данные которых представлены на рис.2, 3.

ДМ с экстремальным критерием прочности [1] является альтернативной моделью по отношению к известным ДМ с эмпирическим критерием прочности [16, 17]

$$\varepsilon_{bm} = \varepsilon_{bu}, \quad (3)$$

в котором предельные деформации ε_{bu} находились путем прямых измерений на сжатой грани испытуемых ЖБЭ, а рекомендуемые их значения приводятся в нормах [17]. Кроме того, ДМ [16, 17] существенно отличаются от ДМ с экстремальным критерием прочности упрощенным распределением напряжений по высоте сжатой зоны бетона ЖБЭ, принимаемым без учета нисходящей ветви ПДС. В результате ДМ [16, 17], не учитывающие экстремальный характер физических зависимостей бетона и ЖБЭ, не могут выявить реально существующий

и важный для расчета прочности ЖБЭ экстремальный критерий прочности нормального сечения (2) [1].

Из критерия (2) видно, что он позволяет находить предельную деформацию ε_{bu} из расчета прочности нормального сечения как одну из неизвестных величин. При этом критерий (2) учитывает зависимость ε_{bu} не только от механических свойств бетона, но и в соответствующих случаях от свойств и количества арматуры, что недоступно нормам [16, 17].

2. ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ БЕТОНА И АРМАТУРЫ

Среди множества предложенных аналитических выражений диаграммы сжатия бетона [18] при кратковременном действии нагрузки значительной простотой и способностью учитывать влияние прочности бетона отличается формула ЕКБ-ФИП

$$\sigma_b / R_b = (K\eta - \eta^2) / [1 + (K - 2)\eta], \quad (4)$$

где

$$\eta = \varepsilon_b / \varepsilon_R, \quad K = E_b \varepsilon_R / R_b, \quad (5)$$

E_b – начальный модуль упругости бетона, R_b, ε_R – напряжение и деформация в максимуме кривой $\sigma_b - \varepsilon_b$ (см. рис.1, а), нормируемые по рекомендациям [17]. Хотя кривая (4) не имеет точку перегиба B (см. рис.1, а), значение этого недостатка обычно несущественно, поскольку чаще всего в сжатой зоне бетона ЖБЭ реализуется сравнительно небольшой участок нисходящей ветви действительной ПДС, расположенный до точки B .

Весьма простой для вычислений, учитывающей точку перегиба B и способной отображать характер ПДС бетонов различной прочности, является двухформульная аппроксимация кривой $\sigma_b - \varepsilon_b$ двумя полиномами третьей степени, из которых один соответствует восходящему участку OA (см. рис.1, а)

$$\sigma_b / R_b = (K - 2)\eta^3 - (2K - 3)\eta^2 + K\eta, \quad (6)$$

а второй – нисходящему участку ABC

$$\frac{\sigma_b}{R_b} = \frac{(1 - \frac{R_r}{R_b}) \left[2\eta^3 - 3(K + 1)\eta^2 + 6K\eta \right] + K^2(K - 3) + (3K - 1)\frac{R_r}{R_b}}{(K - 1)^3}. \quad (7)$$

В формулах (6), (7) η и K выражаются по (5), R_r – определяемая из опытов *остаточная прочность бетона* [2], достигаемая при де-

формации ε_r (см. рис.1, а), принимаемой равной

$$\varepsilon_r = K\varepsilon_R. \quad (8)$$

Аналитические выражения диаграмм растяжения – сжатия арматуры “I”, расположенной на различных уровнях в сечении ЖБЭ, используются в виде прямых $\sigma_{si} = f_{si}(\varepsilon_{si}, \dots)$ или обратных $\varepsilon_{si} = \varphi_{si}(\sigma_{si}, \dots)$ зависимостей, в качестве которых применяются известные аппроксимации [16, 19-20] и другие, зависящие от класса арматуры и разделяющиеся на два известных типа – для арматуры с физическим σ_y и условным $\sigma_{0,2}$ пределами текучести.

Предлагается линейно-двупараболическая аппроксимация диаграммы деформирования арматуры без площадки текучести (рис.4)

$$\begin{cases} 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{se}, \sigma_s = E_s \varepsilon_s, \\ \varepsilon_{se} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{0,2}, \sigma_s = -\alpha \varepsilon_s^2 + \beta \varepsilon_s + \gamma, \\ \varepsilon_{0,2} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su}, \sigma_s = -a \varepsilon_s^2 + b \varepsilon_s + c, \end{cases} \quad (9)$$

в которой

$$\begin{cases} \alpha = p - q, \beta = 2p\varepsilon_{0,2} - q(\varepsilon_{se} + \varepsilon_{0,2}), \gamma = \sigma_{0,2} - p\varepsilon_{0,2}^2 + q\varepsilon_{se}\varepsilon_{0,2}, \\ p = (\sigma_{0,2} - \sigma_{se})^2 / (\varepsilon_{0,2} - \varepsilon_{se})^2, q = \sigma'_{0,2} / (\varepsilon_{0,2} - \varepsilon_{se}), \\ \sigma'_{0,2} = -2a\varepsilon_{0,2} + b, \end{cases} \quad (10)$$

$$a = (\sigma_{su} - \sigma_{0,2}) / (\varepsilon_{su} - \varepsilon_{0,2})^2, b = 2a\varepsilon_{su}, c = \sigma_{su} - a\varepsilon_{su}^2, \quad (11)$$

где исходными параметрами арматуры являются модуль упругости E_s , предел пропорциональности σ_{se} , условный предел текучести $\sigma_{0,2}$, предел прочности σ_{su} и соответствующие этим пределам деформации ε_{se} , $\varepsilon_{0,2}$, ε_{su} .

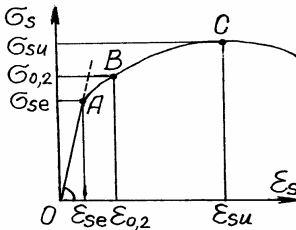


Рис.4 – Линейно-двупараболическая аппроксимация диаграммы $\sigma_s - \varepsilon_s$ с участками AB и BC парабол, гладко стыкующихся в точке B

Достоинством, отличающим (9) от [16, 17], является учет предела прочности σ_{su} , позволяющего в расчете контролировать опасность разрыва арматуры в стадии разрушения нормального сечения.

3. РАСЧЕТНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

3.1. Рассматриваются ЖБЭ с арматурой, имеющей сцепление с бетоном.

3.2. Рассмотрение ограничено ЖБЭ прямоугольного сечения, поскольку на основе изложенного ниже не представляет затруднений учет особенностей расчета прочности сечений различных форм, в частности, таврового со сжатой полкой, для которого расчетную ширину свесов полки можно назначать по рекомендациям [22].

3.3. Полагается, что выполнено требование о минимальном коэффициенте армирования $\mu_s > \mu_{s,\min}$, исключающее хрупкое разрушение сечения по растянутой зоне и обуславливающее разрушение, связанное с разрушением бетона сжатой зоны.

3.4. Рассматривается предельное состояние разрушения нормального сечения, в котором при наличии развитой нормальной трещины пренебрегается сопротивлением растянутого бетона у конца трещины по сравнению с сопротивлением растянутой предварительно напряженной A_{sp} и (или) обычной A_s арматуры.

3.5. Рассматривается пропорциональное монотонно возрастающее нагружение сечения изгибающим моментом M и продольной силой N , которые выражаются через единый параметр нагрузки F посредством формул

$$M = Ff_M, \quad N = Ff_N, \quad (12)$$

где f_M, f_N – грузовые коэффициенты.

3.6. Предельное состояние разрушения нормального сечения рассматривается как мгновенное состояние, определяемое конечной комбинацией нагрузок в момент достижения критерия (2), когда в бетоне сжатой зоны складывается соответствующее уравнениям механики деформируемого твердого тела (МДТТ) и условию (2) распределение напряжений и деформаций, не зависящее от пути нагружения и начальных напряжений и деформаций. Независимость от пути нагружения справедлива и для арматуры с физическим пределом текучести, достигшей последнего в стадии разрушения непереармированного сечения. Для арматуры с физическим пределом текучести, пребывающей в упругом состоянии в момент разрушения переармированного сечения, а также для арматуры с условным пределом текучести, находятся пол-

ные деформации ε_{si} (напряжения σ_{si}) с учетом истории нагружения как соответствующие суммы начальных деформаций ε_{sio} (напряжений σ_{sio}) от предварительного напряжения (рассматриваемого как внутреннее напряжение с учетом необходимых потерь предварительного напряжения и коэффициента точности натяжения по [22]) и приращений деформаций $\Delta\varepsilon_{si}$ (напряжений $\Delta\sigma_{si}$) от предельной нагрузки F_u [23]

$$\varepsilon_{sp} = \varepsilon_{spo} + \Delta\varepsilon_{sp}, \sigma_{sp} = \sigma_{spo} + \Delta\sigma_{sp}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_s = -\varepsilon_{so} + \Delta\varepsilon_s, \sigma_s = -\sigma_{so} + \Delta\sigma_s, \quad (14)$$

$$\varepsilon'_{sp} = -\varepsilon'_{spo} + \Delta\varepsilon'_{sp}, \sigma'_{sp} = -\sigma'_{spo} + \Delta\sigma'_{sp}, \quad (15)$$

$$\varepsilon'_s = -\varepsilon'_{so} + \Delta\varepsilon'_s, \sigma'_s = -\sigma'_{so} + \Delta\sigma'_s, \quad (16)$$

где ε_{sp} и σ_{sp} , ε_s и σ_s и их составляющие в (13), (14) соответствуют предварительно напряженной A_{sp} и обычной A_s арматуре S , ε'_{sp} и σ'_{sp} , ε'_s и σ'_s и их составляющие в (15), (16) соответствуют предварительно напряженной A'_{sp} и обычной A'_s арматуре S' , а смысл обозначений арматур S и S' принят по [22].

3.7. В качестве исходного состояния предварительно напряженно-го ЖБЭ, для которого в формулах (13)-(16) определяются деформации ε_{sio} и напряжения σ_{sio} арматуры “ i ” и от которого отсчитываются приращения $\Delta\varepsilon_{si}$ и $\Delta\sigma_{si}$ от нагрузки, возрастающей до предельного значения F_u , принимается известное характерное НДС ЖБЭ с нулевыми напряжениями в бетоне их сечений, используемое при определении предварительного напряжения в арматуре [24].

3.8. Принимается гипотеза плоских сечений, позволяющая выразить через деформацию сжатой грани бетона ε_{bm} деформации сжатой зоны бетона на уровне ее волокон с координатой ζ , отсчитываемой от нулевой линии деформаций и напряжений (рис. 5).

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{bm}\zeta / y, \quad (17)$$

где y – высота сжатой зоны бетона.

Поскольку в указанном в п.3.7 исходном состоянии предварительно напряженных ЖБЭ НДС бетона нулевое, как и в начальном

состоянии обычных ЖБЭ, то приращения деформаций $\Delta \varepsilon_{si}$ предварительно напряженных и полные деформации ε_{si} обычных ЖБЭ от нагрузки будут выражаться из гипотезы плоских сечений одинаковыми зависимостями от деформации бетона ε_{bm}

$$\Delta \varepsilon_{sp} = \varepsilon_{bm}(h - y - a_p) / y, \Delta \varepsilon_s(\varepsilon_s) = \varepsilon_{bm}(h - y - a) / y, \quad (18)$$

$$\Delta \varepsilon'_{sp} = \varepsilon_{bm}(y - a'_p) / y, \Delta \varepsilon'_s(\varepsilon'_s) = \varepsilon_{bm}(y - a') / y, \quad (19)$$

где h, a_p, a, a'_p, a' см. рис.5.

3.9. Состояние разрушения нормального сечения описывается расчетными схемами усилий и деформаций, показанными на рис.5. При этом схема на рис.5, *a* соответствует изгибу и внецентренному сжатию-растяжению с большими эксцентриситетами (БЭ), когда сечение частично сжато. Схема на рис.5, *б* отвечает внецентренному сжатию с малыми эксцентриситетами (МЭ), когда сечение полностью сжато. Случай внецентренного растяжения с малыми эксцентриситетами не показан как не представляющий трудности.

Таким образом, расчетные схемы на рис.5 в рамках разрабатываемой ДМ охватывают все случаи расчета.

4. РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Для определения связи нагрузки F с деформациями и напряжениями бетона сжатой зоны ε_b , σ_b , арматуры растянутой ε_{sp} , σ_{sp} , ε_s , σ_s и сжатой ε'_{sp} , σ'_{sp} , ε'_s , σ'_s зон сечения ЖБЭ используем расчетные схемы на рис.5, а также:

1) физические зависимости

для бетона – в виде некоторой аппроксимации ПДС

$$\sigma_b = f_b(\varepsilon_b, \dots), \quad (20)$$

для арматуры “*i*” – в виде прямой или обратной зависимости

$$\sigma_{si} = f_{si}(\varepsilon_{si}, \dots), \quad \varepsilon_{si} = \varphi_{si}(\sigma_{si}, \dots); \quad (21)$$

2) геометрические зависимости (17)-(19);

3) уравнения равновесия с учетом (12), а также

$$N_{sp} = \sigma_{sp} A_{sp}, N_s = \sigma_s A_s, N'_{sp} = \sigma'_{sp} A'_{sp}, N'_s = \sigma'_s A'_s, \quad (22)$$

$$\sum X = 0; \pm F f_N + \sigma_{sp} A_{sp} + \sigma_s A_s - \sigma'_{sp} A'_{sp} - N_b = 0, \quad (23)$$

$$\sum M_0 = 0; F[f_M \pm f_N(y - y'_c)] - \sigma_{sp} A_{sp}(h - y - a_p) - \sigma_s A_s(h - y - a) - \sigma'_{sp} A_{sp}(y - a'_p) - \sigma'_s A_s(y - a') - N_b y_N = 0, \quad (24)$$

где знак “плюс” принимается при сжимающей и “минус” при растягивающей N , а величины y, N_b, y_N должны соответствовать конкретному случаю расчета на рис.5.

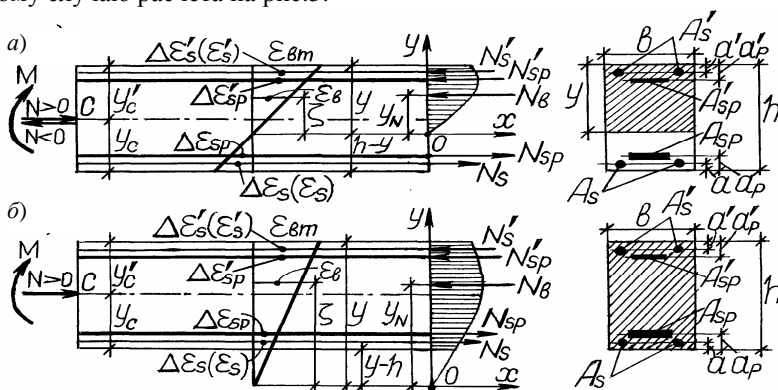


Рис.5 – Случай расчета прочности нормального сечения:

$a - y \leq h$; $b - y \geq h$.

Равнодействующая напряжений в сжатой зоне N_b и координата y_N ее точки приложения, отсчитываемая от нулевой линии деформаций и напряжений, находятся на основе (20) и (17). При этом для случаев, приведенных на рис.5, имеем:

$$a) y \leq h, N_b = R_b b y \varphi(\epsilon_{bm}, \dots), y_N = y \psi(\epsilon_{bm}, \dots) / \varphi(\epsilon_{bm}, \dots), \quad (25)$$

где φ, ψ – функции от деформации ϵ_{bm} сжатой грани бетона ЖБЭ, вид которых полностью определяется принятой формулой (20), зависящие также от характеристик бетона E_b, R_b, ϵ_R и др.;

$$b) y \geq h, N_b = R_b b h \bar{\varphi}(\epsilon_{bm}, y, \dots), y_N = h \bar{\psi}(\epsilon_{bm}, y, \dots) / \bar{\varphi}(\epsilon_{bm}, y, \dots), \quad (26)$$

где $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ – функции переменных ϵ_{bm} и y , зависящие также от характеристик бетона E_b, R_b, ϵ_R и др., вид которых определяется формулой (20).

5. РЕШЕНИЕ ВАЖНЕЙШИХ ЗАДАЧ

5.1. Проверка прочности нормального сечения

Целью этой задачи является определение предельного значения параметра нагрузки F_u заданного нормального сечения и сравнение его с действующим F . Известные этой задачи, кроме F_u , включа-

ют ε_{bm} , u , ε_b , σ_b , ε_{sp} , σ_{sp} , ε_s , σ_s , ε'_{sp} , σ'_{sp} , ε'_s , σ'_s – всего 13 величин, для определения которых используются физические условия бетона (одно) и арматуры (четыре), геометрические зависимости (17)-(19) (пять), уравнения равновесия (два). Перечисленные зависимости включают 12 уравнений. Дополнительной зависимостью является критерий прочности нормального сечения (2), благодаря которому задача проверки прочности становится оптимизационной задачей нелинейного математического программирования [7] и решение ее может находиться с помощью известных оптимизационных программ [8] на ПЭВМ.

Здесь имеет место оптимизационная задача на условный экстремум, в которой отвечающая критерию (2) целевая функция получается, если из уравнения равновесия (24) выразить величину F , а ограничение – равенство следует из (23), (24) после исключения из них F . При этом правая часть целевой функции и ограничение – равенство оказываются зависящими только от неизвестных ε_{bm} и u , если напряжения арматуры σ_{si} выразить при помощи физических уравнений (21) через деформации ε_{si} , учитывая связь последних с ε_{bm} и u , соответствующую (13)-(16) и (18)-(19).

В процессе решения необходимо контролировать соблюдение предварительно принятого случая расчета по рис.5, характер работы арматуры (упругий, пластический, упругопластический – с учетом их диаграммы $\sigma_{si} - \varepsilon_{si}$), возможность разрыва высокопрочной растянутой арматуры.

5.2. Подбор требуемого сечения арматуры

Для решения данной задачи используется приведенная выше система физических, геометрических и статических уравнений, а также критерий (1), благодаря которому эта задача оказывается также оптимизационной. При этом в критерии (1) отсутствует арматура A'_{sp} и A_s , так как, следуя [25], получается, что задача оптимизации общего случая армирования сечения предварительно напряженного ЖБЭ, включающего A'_{sp} , A_s , кроме A_{sp} , A'_s (см. рис.5, а), решения не имеет. Такой результат обусловлен теми фактами, что арматура A'_{sp} и A_s при наличии A_{sp} является заведомо неоптимальной по стадии разрушения нормального сечения, поскольку арматура A'_{sp} оказыва-

ется растянутой, будучи расположенной в сжатой зоне бетона, а напряжение σ_s арматуры A_s всегда меньше напряжения σ_{sp} арматуры A_{sp} . Если же арматура A'_{sp} и A'_s фактически используется, то ее сечение должно задаваться по известным рекомендациям, а оптимизации подлежат A_{sp} и A'_s . В случае расчета, показанном на рис.5, б, не оптимизируется не только A'_{sp} , но и арматура A_{sp} , расположенная здесь также в сжатой зоне, и оптимизируется только арматура без предварительного напряжения A_s и A'_s как и в обычных ЖБЭ. Такая оптимизационная задача имеет единственное решение.

Излагаемое ниже в п.5.2 для предварительно напряженных ЖБЭ переносится и на обычные, заменяя при этом в тексте и формулах A_{sp} , σ_{sp} , R_{sp} соответственно на A_s , σ_s , R_s .

При подборе арматуры A_{sp} и A'_s целесообразно ограничивать их напряжения σ_{sp} и σ'_s условиями-неравенствами

$$\sigma_{sp} \leq R_{sp}, \quad \sigma'_s \leq R'_s, \quad (27)$$

где R_{sp} , R'_s – расчетные сопротивления соответствующей арматуры, найденные по физическому или условному пределу текучести (для R'_s – без учета предельной сжимаемости бетона). Условия (27) определяют работу арматуры в широком диапазоне напряжений, включая упругую область.

Таким образом, задача подбора сечения арматуры нормального сечения ЖБЭ по заданной нагрузке F сводится к оптимизационной задаче определения величин A_{sp} , A'_s , ε_{bm} , y , из условия (1) при ограничениях-равенствах (23), (24) и ограничениях (27), в которых напряжения σ_{sp} , σ_s , σ'_{sp} , σ'_s арматуры A_{sp} , A_s , A'_{sp} , A'_s связаны с ε_{bm} и y посредством зависимостей (21), (13)-(16), (18)-(19). Для получения решения необходимо найти минимум лагранжиана [25]

$$L(A_{sp}, A'_s, \varepsilon_{bm}, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = A_{sp} + A'_s - \lambda_1 f_1(A_{sp}, A'_s, \varepsilon_{bm}, y) - \lambda_2 f_2(A_{sp}, A'_s, \varepsilon_{bm}, y) - \lambda_3 (\sigma_{sp} - R_{sp}) - \lambda_4 (\sigma'_s - R'_s), \quad (28)$$

в котором $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – неизвестные параметры Лагранжа, $f_1(A_{sp}, A'_s, \varepsilon_{bm}, y)$, $f_2(A_{sp}, A'_s, \varepsilon_{bm}, y)$ – краткое обозначение соот-

ветственно (23), (24).

Условия Куна-Таккера [25], определяющие минимум лагранжиана (28), включают

1) условия неположительности параметров

$$\lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0; \quad (29)$$

2) частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial A_{sp}} = 0, \frac{\partial L}{\partial A'_s} = 0, \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{bm}} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0; \quad (30)$$

3) условия дополняющей нежесткости, соответствующие ограничениям-неравенствам

$$\lambda_3(\sigma_{sp} - R_{sp}) = 0, \lambda_4(\sigma'_s - R'_s) = 0; \quad (31)$$

4) ограничения-равенства (23), (24)

$$f_1(A_{sp}, A'_s, \varepsilon_{bm}, y) = 0, f_2(A_{sp}, A'_s, \varepsilon_{bm}, y) = 0 = 0. \quad (32)$$

Условия (31) требуют рассмотрения случаев напряжений σ_{sp} , σ'_s в арматуре A_{sp} , A'_s

$$\lambda_3 \neq 0; \sigma_{sp} = R_{sp}; \quad (33)$$

$$\lambda_3 = 0; \sigma_{sp} \leq R_{sp}; \quad (34)$$

$$\lambda_4 \neq 0; \sigma'_s = R'_s; \quad (35)$$

$$\lambda_4 = 0; \sigma'_s \leq R'_s. \quad (36)$$

Случай (33) отвечает перепреармированным изгибаемым и внецентренно сжатым-растянутым с БЭ ЖБЭ, в которых нельзя уравновесить нагрузку F без растянутой арматуры, когда из расчета получается требуемая $A_{sp} > 0$. Случай (34) возможен при внецентренном сжатии с МЭ, когда только внутренних сил N_b и N'_s достаточно для уравнивания нагрузки F и в расчете получается $A_{sp} < 0$, т.е. A_{sp} не требуется. Поэтому случай больших эксцентриситетов, при котором требуется $A_{sp} = 0$, является границей между случаями БЭ и МЭ внецентренно сжатых ЖБЭ. Следовательно, различие случаев МЭ и БЭ обусловлено тем, что при МЭ арматура A_{sp} (или A_s) не нужна для восприятия внецентренно сжимающей силы F , а при БЭ растянутся арматура A_{sp} (или A_s) необходима для обеспечения сопротивления ЖБЭ действию силы F . Такое разграничение случаев МЭ и БЭ, впер-

вые обоснованное в [26], отвечает критерию минимума расхода арматуры (1) и точнее выражает сущность этих случаев по сравнению с известным разграничением [22], в котором влияние эксцентриситета отождествляется с влиянием количества растянутой арматуры и применяется общий эмпирический критерий ξ_R для разграничения как МЭ и БЭ, так и переармированных и нормально армированных сечений.

Разрабатываемая здесь ДМ позволяет четко разграничивать случаи БЭ и МЭ и при внецентренном растяжении. Очевидно, что теоретической границей здесь является случай БЭ, при котором высота сжатой зоны бетона $y = a'$ (см. рис.5), соответственно $\sigma'_s = 0$ и арматура A'_s не нужна. Однако, для надежности ЖБЭ в этом случае, по видимому, целесообразно ставить арматуру A'_s уже при $y = 2a'$, даже если она не требуется как сжатая арматура.

В случае (35) сопротивление сжатой арматуры используется полностью, а в случае (36) – частично. Как показывает анализ, система уравнений Куна-Таккера (29)-(36) является совместной и приводит к единственному решению, когда принимаются условия (33) и (35), т.е. при полном использовании сопротивления растянутой и сжатой арматуры, что полностью отвечает условию (1). Поэтому при расчете требуемой арматуры следует применять условия (33) и (35).

Если из расчета получилось $A_{sp} < 0$ (или $A'_s < 0$), то принимается $A_{sp} = 0$ ($A'_s = 0$) и производится перерасчет остальной арматуры при отсутствии A_{sp} (A'_s) и связанных с последней зависимостей.

6. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Изложенная выше общая методика расчета прочности нормальных сечений ЖБЭ оказывается достаточно простой в некоторых конкретных случаях и становится возможным “ручной” расчет, который ценен тем, что позволяет глубже уяснить разрабатываемую здесь ДМ с экстремальным критерием прочности. Вообще же практические расчеты должны выполняться на ПЭВМ, используя известные программы решения оптимизационных задач, например [8].

6.1. Проверка прочности сечения изгибаемого ЖБЭ с одиночной арматурой с физическим пределом текучести без предварительного напряжения.

Дано: $b, h, a, h_0 = h - a, A_s, R_s, R_b, E_b, \varepsilon_R$. Неизвестные: ε_{bm} , y , $F_u = M_u$.

Предполагая сечение непереармированным, когда $\sigma_s = R_s$, из уравнений равновесия (23), (24), имеющих вид

$$R_s A_s - R_b b y \varphi = 0, \quad M - R_b b y [h_0 - y(\varphi - \psi) / \varphi] = 0, \quad (37)$$

исключая y , получим зависимость момента сечения от деформации ε_{bm}

$$M = R_s A_s (h_0 - R_s A_s \chi / (R_b b)), \quad (38)$$

где

$$\chi = (\varphi - \psi) / \varphi^2 \quad (39)$$

есть функция от ε_{bm} . Тогда критерии (2) и (38) приводят к уравнению для определения предельной деформации сжатой грани бетона в нормальном сечении ε_{bu}

$$\partial \chi / \partial \varepsilon_{bm} \big|_{\varepsilon_{bm} = \varepsilon_{bu}} = 0, \quad (40)$$

которое показывает, что в рассматриваемом простейшем случае деформация ε_{bu} зависит только от свойств бетона.

Приняв в качестве (20) формулу (4) при $K = 2$ ($R_b \cong 30$ МПа), получим из (40) $\varepsilon_{bu} = 1,268 \varepsilon_R$, а с учетом последней имеем $\varphi = 0,732$, $\psi = 0,443$, $\chi = 0,539$. Используя (18), проверяем непереармированность сечения по условию $\varepsilon_s = \varepsilon_{bu} (h_0 - y) / y \geq R_s / E_s$, где $y = R_s A_s / R_b b \varphi$. Если непереармированность подтверждается, из (38) вычисляется предельный момент M_u . В противном случае сечение рассчитывается как переармированное и вместо R_s в уравнениях (37) надо подставить σ_s , выраженное через ε_{bm} посредством (21) и (18). В этом случае для определения ε_{bu} получается более сложное чем (40) уравнение, показывающее, что ε_{bu} переармированных сечений зависит не только от свойств бетона, но и от свойств и количества арматуры. Последнее согласуется с данными экспериментов [23].

Рассматривая согласно (38) момент M как функцию переменных ε_{bm} и A_s , получим поверхность, показанную ее сечениями на рис.6.

Для поверхности $M(\varepsilon_{bm}, A_s)$ являются характерными сечения $M(\varepsilon_{bm})$ при $A_s = const$, имеющие максимум, подтверждающий критерий прочности нормального сечения (2). Именно эти сечения ото-

бражают кривые, показанные на рис.2, 3, и соответствующие ЖБЭ с различными НДС. С другой стороны, сечения $A_s(\varepsilon_{bm})$ при $M = const$ имеют минимум, свидетельствующий о справедливости критерия (1) для задач подбора арматуры. Необходимость взаимосвязанных критериев (1) и (2) следует также из теории двойственности математического нелинейного программирования [7], если учесть, что ДМ с экстремальным критерием прочности (2) приводит к задаче проверки прочности как оптимизационной, которой должна соответствовать двойственная задача. Именно такой является задача подбора сечения арматуры с критерием (1), по характеру которой принято называть в [7] прямой или исходной задачей, а задачу с критерием (2) – двойственной.

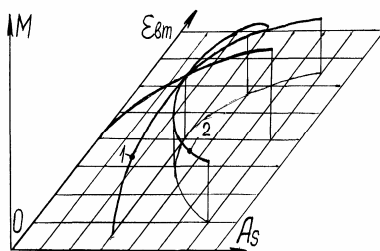


Рис.6 – Сечения поверхности $M(\varepsilon_{bm}, A_s)$:

1 – при $A_s = const$; 2 – при $M = const$.

6.2. Подбор одиночной ненапряженной арматуры в сечении изгибаемого ЖБЭ.

Дано: $b, h, a, h_0, M, R_b, R_s, E_b, \varepsilon_R$. Неизвестные: A_s, ε_{bm}, y . Но поскольку напряжение арматуры σ_s однозначно связано с ε_{bm} и y посредством (21) и (18), будем считать неизвестной величину σ_s вместо y , благодаря чему выражение σ_s через ε_{bm} и y не потребуется и решение упростится. При этом, исключая y из (23) и (24), получим ограничение-равенство

$$M - \sigma_s A_s (h_0 - \sigma_s A_s \chi / (R_b b)) = 0, \quad (41)$$

где χ определяется по (39). Кроме (41) введем ограничение – неравенство $\sigma_s \leq R_s$, аналогичное первому из (27). В результате лагранжиан (28) данной задачи имеет вид

$$L(A_s, \varepsilon_{bm}, \sigma_s, \lambda_1, \lambda_2) = A_s - \lambda_1 [M - \sigma_s A_s (h_0 - \sigma_s A_s \chi / (R_b b))] - \lambda_2 (\sigma_s - R_s). \quad (42)$$

Условия Куна-Таккера (29)-(32) задачи записываются так:

$$1) \lambda_2 \leq 0; \quad (43)$$

$$2) \frac{\partial L}{\partial A_s} = 1 - \lambda_1 (-\sigma_s h_0 + 2 A_s \sigma_s^2 \chi / (R_b b)) = 0; \quad (44)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{bm}} = -\lambda_1 \sigma_s^2 A_s^2 \frac{\partial \chi}{\partial \varepsilon_{bm}} / (R_b b) = 0; \quad (45)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_s} = -\lambda_1 (-A_s h_0 + 2 A_s^2 \sigma_s \chi / (R_b b)) - \lambda_2 = 0; \quad (46)$$

$$3) \lambda_2 (\sigma_s - R_s) = 0; \quad (47)$$

$$4) M - \sigma_s A_s (h_0 - \sigma_s A_s \chi / (R_b b)) = 0. \quad (48)$$

Из (44) видно, что $\lambda_1 \neq 0$ и поскольку выражения в круглых скобках равенств (44) и (46) отрицательные, то $\lambda_1 < 0$ и с учетом (43), (46) получается $\lambda_2 \neq 0$. При $\lambda_2 \neq 0$ из (47) должно быть

$$\sigma_s = R_s, \quad (49)$$

т.е. оптимальное армирование имеет место при полном использовании сопротивления арматуры. Из (45) следует условие (40) и предельная деформация сжатой грани бетона ε_{bu} получается та же, что и в задаче 6.1. Таким образом, система условий Куна-Таккера задачи оптимизации арматуры A_s является совместной, и эта задача имеет единственное решение. Оптимальная площадь A_s вычисляется из (48) по найденным $\chi(\varepsilon_{bu})$ и $\sigma_s = R_s$

$$A_s = R_b b h_0 \left[1 - \left(1 - 4 \chi M / (R_b b h_0^2) \right)^{1/2} \right] / (2 \chi R_s). \quad (50)$$

ВЫВОДЫ

1. Полная диаграмма сжатия бетона, имеющая строгий максимум и нисходящую ветвь, проявляется в ЖБЭ с неоднородным НДС, обуславливая подобную себе зависимость параметра нагрузки F от деформации сжатой грани бетона ε_{bm} и необходимость ДМ с экстремальным критерием прочности нормального сечения.

2. ДМ с экстремальным критерием прочности нормального сече-

ния обуславливает оптимизационный характер задач проверки прочности и подбора сечения арматуры, имеющих соответствующие целевые функции (2), (1) и взаимосвязанных соотношениями двойственности [7].

3. Расчеты прочности нормальных сечений ЖБЭ в соответствии с рассматриваемой ДМ могут выполняться на основе оптимизационных программ [8] или других, входящих в известные пакеты прикладных программ.

4. ДМ с экстремальным критерием прочности является более точной и общей по сравнению с известными ДМ:

- она позволяет определять как одну из неизвестных решаемых задач предельную деформацию сжатой грани бетона ЖБЭ с учетом влияния ряда факторов, не отображаемых известными ДМ, но обнаруживаемых в экспериментах (форма сечения, свойства и количество арматуры перearмированных ЖБЭ, предварительное напряжение и др.);

- эта модель уточняет обусловленные различными факторами границы между случаями БЭ и МЭ внецентренно сжатых и внецентренно растянутых ЖБЭ, перearмированных и нормально армированных сечений.

5. Благодаря общности ДМ с экстремальным критерием прочности, позволяющей учитывать непосредственно в расчетах множество факторов, в отличие от методики [22], отпадает необходимость в использовании: 1) граничной высоты сжатой зоны бетона ξ_R для различения перearмированных и нормально армированных сечений изгибаемых ЖБЭ и случаев БЭ и МЭ внецентренно сжатых ЖБЭ; 2) коэффициента $\gamma_{sb} \geq 1$ для учета работы высокопрочной арматуры при напряжениях выше условного предела текучести; 3) расчетного сопротивления сжатию арматуры R_{sc} и предельного напряжения в арматуре сжатой зоны предварительно напряженных ЖБЭ σ_{sc} .

6. ДМ с экстремальным критерием прочности преодолевает ряд условностей методики [22], искажающих действительное НДС и снижающих точность расчета: 1) прямоугольную эпюру сжимающих напряжений бетона; 2) аппроксимацию единой кривой фактически различных в областях нормально армированных и перearмированных сечений зависимостей “деформация арматуры ε_s – относительная высота сжатой зоны бетона ξ ” [23]; 3) переход от деформации ε_s к напряжению σ_s в зависимости $\xi_s - \xi$ по закону Гука с введением по-

правок в области упруго-пластической работы арматуры с условным пределом текучести; 4) неточное разделение случаев БЭ и МЭ внецентренно сжатых ЖБЭ, не различающее влияние эксцентриситета продольной силы от влияния количества арматуры.

7. Расчеты на основе ДМ с экстремальным критерием прочности по сравнению с использующими прямоугольную эпюру напряжений в сжатой зоне бетона [22] приводят к более надежным ЖБЭ. Расчеты по прямоугольной эпюре завышают несущую способность и занижают требуемое сечение арматуры наиболее существенно в случае МЭ внецентренно сжатых ЖБЭ.

8. ДМ с экстремальным критерием прочности сочетает физическую ясность исходных положений с использованием строгих методов, формализующих решение практических задач и упрощающих усвоение методики расчета инженерами-проектировщиками и студентами.

1. Митрофанов В.П., Арцев С.И. Предельная сжимаемость бетона нормальных сечений железобетонных элементов // Проблемы теорії і практики залізобетону: Зб. наук. статей, присвячений 100-річчю з дня народження проф. М.С.Торяника. – Полтава: ПДТУ ім. Юрія Кондратюка, 1997. – С.333-337.

2. Митрофанов В.П., Павліков А.М., Митрофанов Б.П., Шкурупій О.А. Про граничну деформацію стиснутої грані бетону в нормальному перерізі залізобетонних елементів // Збірник наукових праць. Серія "Галузеве машинобудування, будівництво". Вип.14. – Полтава: ПолтНТУ, 2004. – С.95-102.

3. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А. К расчету прочности нормальных сечений изгибаемых элементов // Бетон и железобетон. – 1983. – №4. – С.11-12.

4. Байков В.Н., Горбатов С.В. Определение предельного состояния внецентренно сжатых элементов по неупругим зависимостям напряжения-деформации бетона и арматуры // Бетон и железобетон. – 1985. – №6. – С.13-14.

5. Митрофанов В.П., Павліков А.М. До розрахунку граничних значень деформацій бетону в розв'язанні задач міцності нормальних перерізів залізобетонних елементів // Збірник наукових праць. Серія "Галузеве машинобудування, будівництво". Вип.13. – Полтава: ПолтНТУ, 2003. – С.28-33.

6. Mitrofanov V.P. Optimization Stringth Theory of Reinforced Concrete Bar Elements and Structures with practical aspects of its use. Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol. 71. – No.4. – December 2000. – pp.73-125. Copenhagen: Danish Society for Structural Science and Engineering.

7. Мину М. Математическое программирование: теория и алгоритмы / Пер. с франц. – М.: Наука, 1990. – 488 с.

8. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: в 2-х кн. Кн.2 / Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 320 с.

9. Дегтярев В.В., Гагарин К.А. Метод экспериментального определения напряженного состояния железобетонного сечения при изгибе // Труды ЦНИИС. Вип.70. – М.: Транспорт, 1969.

10. Баклашов И.В. Деформирование и разрушение породных массивов. – М.: Недра, 1988. – 271 с.

11. Rashid M.A., Mansur M.A., Paramasivam P. Effect of Reinforcement Ratios on Flexural Behavior of High Strength Concrete Beams. 5-th Int. Symp. on Utilization of HS/HP Concrete 20-24 June 1999, Sandefjord, Norway. – Proceedings, Volume 1. – pp 578-587.

12. Weiss W.J., Guler K., Shah S.P. An Experimental Investigation to Determine the Influence of Size on the Flexural Behavior of High Strength Reinforced Concrete Beams (see [11]). – pp. 709-718.
13. Vander lei R.D., Giongo J.S., Takeya T. Theoretical – Experimental Analysis of Reinforced High Strength Concrete Columns Under Eccentric Compression. (see [11]). – pp. 673-682.
14. Takeuti A.R., de Hanai J.B. Strength and Ductility of Reinforced Concrete Columns Strengthened with High-Performance Concrete Jackets. (see [11]). – pp. 646-655.
15. Sun Y., Ikenono Y., Sakino K. Mechanical Properties of Ultra High-Strength Concrete Confined by Steel Tube. (see [11]). – pp. 636-645.
16. Practical design of reinforced and prestressed concrete structures based on the CEB – FIP mode code (MC 78). – London: Thomas Telford Limited, 1984. – 36 pp.
17. CEB – FIP Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1: General Rules and Rules for Buildings, ENV 1992 –1-1. – Brussels: CEN, 1991. – 253 pp.
18. Зак М.Л., Гуца Ю.П. Аналитическое представление диаграммы сжатия бетона // Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций: Сб. науч. трудов. – М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1987. – С.103-107.
19. Мадатян С.А., Горячев Б.П. Расчет деформаций изгибаемых железобетонных элементов при работе арматуры в упруго-пластической стадии / Предельные состояния элементов железобетонных конструкций. – М.: Стройиздат, 1976. – С.132-137.
20. Семенов Н.И. Предварительно напряженный железобетон с витой проволоочной арматурой. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
21. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры // Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций: Сб. науч. трудов. – М.: НИИЖБ Госстроя СССР, 1986. – С.7-25.
22. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 2000. – 76 с.
23. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций / А.А.Гвоздев, С.А.Дмитриев, Ю.П.Гуца и др. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
24. Кудзис А.П. Железобетонные и каменные конструкции: В 2-х ч. Ч.1. Материалы, конструирование, теория и расчет. – М.: Высшая школа, 1988. – 287 с.
25. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х кн., кн. 2 / Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 496 с.
26. Митрофанов В.П. Уточнение понятий случаев разрушения железобетонных элементов при внецентренном сжатии // Проблеми теорії і практики залізобетону: Зб. наук. статей, присвячених 100-річчю з дня народження проф. М.С.Торяника. – Полтава: ПДТУ ім. Юрія Кондратюка, 1997. – С. 323–326.

Получено 25.10.2004

УДК 624.012.41

С.І.РОГОВИЙ, канд. техн. наук

Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка

СУЧАСНИЙ СТАН ТА УДОСКОНАЛЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ РОЗРАХУНКУ ЗАЛІЗОБЕТОНУ

На основі результатів аналізу існуючих розрахункових моделей, а також теоретичних і експериментальних досліджень запропоновано удосконалену деформаційну мо-